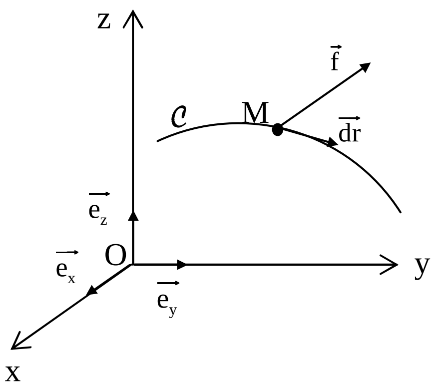
ETUDE ENERGETIQUE DU MOUVEMENT D'UN POINT MATERIEL

En général l'action d'une force destinée à produire ou à modifier un mouvement s'accompagne d'un transfert d'énergie. Dans ce chapitre on va étudier ces transferts en se limitant au cas d'un point matériel en mouvement dans **un référentiel galiléen**.

I. PUISSANCE ET TRAVAIL D'UNE FORCE



Soit un point matériel M, de masse m, étudié dans le référentiel R de repère associé R(Ox,Oy,Oz).
Ce point matériel est repéré dans R à l'instant t par le vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = \vec{r}$ et sa vitesse est $\vec{v}(M/R,t) = \vec{v}$.
Il est soumis à une force $\vec{f}(\vec{r},\vec{v},t..) = \vec{f}$

Les définitions données ci-dessous sont valables quelle que soit la nature du référentiel R (galiléen ou non).

1) Puissance de $\vec{f}$ dans R

La puissance de la force $\vec{f}$, appliquée au point matériel M de vitesse $\vec{v}$ dans R à l'instant t est définie par :

$P(\vec{f}/R,t) = \vec{f}.\vec{v}(M/R,t)$ **soit** $\boxed{\mathbf{P = \vec{f}.\vec{v}}}$ **(** $P = \|\vec{f}\|.\|\vec{v}\|.\cos\alpha$ avec α = angle entre $\vec{f}$ et $\vec{v}$ à t)

P est grandeur algébrique de dimension [P] =.....................; qui s'exprime en ....dans le SI.

2) Travail élémentaire de $\vec{f}$ dans R

- ***Définition***

Le travail élémentaire de la force $\vec{f}$ entre les instants t et t+dt est défini par : $\boxed{\mathbf{\delta W = P.dt}}$

Sachant que $\vec{v} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_R$ et $\delta W = \vec{f}.\vec{v}.dt$ il vient : $\boxed{\mathbf{\delta W = \vec{f}.\vec{dr}}}$ avec $\vec{dr} = d\left(\overrightarrow{OM}\right)$ = déplacement élémentaire de M pendant dt = variation du vecteur position entre t et t + dt.

δW est une grandeur algébrique de dimension [W] = ... ; qui s'exprime en ....dans le SI.

- ***Expressions analytiques du travail élémentaire :*** $\delta W = \vec{f}.\vec{dr} = \vec{f}.\vec{v}.dt$

Coordonnées cartésiennes associées à la base $(\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})$

$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{e_x} + y.\vec{e_y} + z.\vec{e_z}$ $\quad \vec{dr} = \vec{v}.dt = dx.\vec{e_x} + dy.\vec{e_y} + dz.\vec{e_z}$ $\quad \vec{f} = f_x.\vec{e_x} + f_y.\vec{e_y} + f_z.\vec{e_z}$

$\delta W = f_x.dx + f_y.dy + f_z.dz$

Coordonnées cylindriques associées à la base $(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$

$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{e_r} + z.\vec{e_z}$ $\quad \vec{dr} = dr.\vec{e_r} + r.d(\vec{e_r}) + dz.\vec{e_z} = dr.\vec{e_r} + r.d\theta.\vec{e_\theta} + dz.\vec{e_z}$ $\quad \vec{f} = f_r.\vec{e_r} + f_\theta.\vec{e_\theta} + f_z.\vec{e_z}$

$\delta W = f_r.dr + f_\theta.r.d\theta + f_z.dz$ **Penser à vérifier l'homogénéité** ! !

3) Propriétés de la puissance et du travail élémentaire

- ***Additivité***

Si $\vec{f}$ est la résultante de plusieurs interactions sur M : $\vec{f} = \sum_k \vec{f_k}$: $\begin{cases} P = \left(\sum_k \vec{f_k}\right).\vec{v} = \sum_k (\vec{f_k}.\vec{v}) = \sum_k P(\vec{f_k}) \\ \delta W = \sum_k \delta W(\vec{f_k}) \end{cases}$

- ***Travail moteur ou résistant***

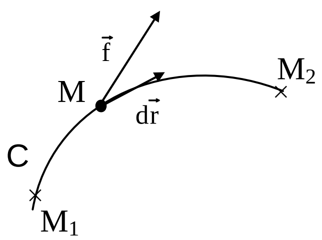
Si $\delta W > 0$ (ou $P > 0$), le travail de la force est dit moteur (puissance motrice).
Exemples : ....

Si $\delta W < 0$ (ou $P < 0$), il est dit résistant (puissance résistante).
Exemples : ....

Si la force est orthogonale au déplacement élémentaire (orthogonale à la vitesse) son travail et sa puissance sont nuls.
Exemples : ....

- ***Par l'intermédiaire de la vitesse $\vec{v}$, les notions de puissance et de travail élémentaire dépendent du référentiel d'étude.***

4) Travail d'une force au cours d'un déplacement fini



Le point matériel M soumis à l'action de $\vec{f}$ décrit dans R une trajectoire C, se déplaçant de M_1 (instant t_1) à M_2 (instant t_2) .
Le travail de la force $\vec{f}$ entre les instants t_1 et t_2 est donné par les intégrales

$$\boxed{W = \int_{M_1(C)}^{M_2} \delta W = \int_{t_1}^{t_2} P(t).dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}.\vec{v}.dt = \int_{M_1\,(C)}^{M_2} \vec{f}.d\vec{r}}$$

W = circulation de $\vec{f}$ de M_1 à M_2 le long de la trajectoire C effectivement suivie par M entre t_1 et t_2.
Dans le cas général W dépend de la nature de C, c'est à dire **du chemin suivi par M entre M_1 et M_2**.

5) Exemples de calcul de travaux (Voir TD)

II. THEOREME DE LA PUISSANCE CINETIQUE ET DE L'ENERGIE CINETIQUE

1) Energie cinétique d'un point matériel

L'énergie cinétique d'un point matériel M, de masse m, de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel R est définie par :

$$\boxed{E_c(M/R) = E_c = \frac{1}{2}m.v^2 = \frac{p^2}{2.m}}$$

$\vec{p}$ = quantité de mouvement de M dans R
Valable $\forall$ la nature de R
$[E_c]=M.L^2.T^{-2}$ s'exprime en joule dans le SI

2) Théorème de la puissance cinétique dans R_G galiléen

Dans **R_G galiléen**, **le principe fondamental de la dynamique (PFD)** appliqué à M s'écrit :

$$m\vec{a}(M/R_G) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}$$

La puissance P de la résultante $\vec{f}$ des forces appliquées à M est égale à :

$$P = \vec{f}.\vec{v} = m.\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v} = \frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{dt}$$

<u>Théorème de la puissance cinétique</u> : **dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale à la puissance de la résultante des forces qui lui sont appliquées.**

$$\boxed{P = \vec{f}.\vec{v} = \frac{dE_c}{dt} \quad \text{dans R galiléen}}$$

3) Théorème de l'énergie cinétique dans R_G galiléen

Se déduit directement du théorème précédent : $\delta W = P.dt$ soit $\boxed{\delta W = dE_c}$ dans R galiléen.
Par intégration entre 2 instants t_1 et t_2 (ou entre les deux positions correspondantes M_1 et M_2 sur la trajectoire C) il vient :

Dans R galiléen $$\boxed{\Delta E_c = E_c(t_2) - E_c(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} P(t).dt = \int_{M_1 (C)}^{M_2} \vec{f}.d\vec{r} = W}$$

<u>Théorème de l'énergie cinétique</u> **: dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants t_1 et t_2 est égale au travail de toutes les forces appliquées au cours de son déplacement (M_1, M_2).**

4) Propriétés et Applications de ces théorèmes (voir TD)

- Sauf indication contraire, on travaillera dans le référentiel terrestre comme dans un **référentiel galiléen,** condition nécessaire d'application de ces théorèmes.
- Si $\vec{f}$ **est orthogonale à** $\vec{v}$: P = 0 donc **E_c est constante**.
- L'utilisation de ces théorèmes est commode si l'on s'intéresse aux variations de vitesse du point matériel; elle permet d'éliminer les forces orthogonales au déplacement.
- De même, cette méthode énergétique est adaptée aux cas où un seul paramètre de position suffit à décrire l'évolution du système (système à un degré de liberté).

III. ENERGIE POTENTIELLE ET FORCES CONSERVATIVES

1) Champ de forces et énergie potentielle

- ***Champ de forces***

Lorsqu'une force $\vec{f}$, appliquée à point matériel M, ne dépend **que de la position de son point d'application M** dans R (référentiel d'étude), on dit que M se trouve dans **un champ de forces** (indépendant du temps) $\vec{f}(\overrightarrow{OM})$ **.**
Exemples : Champ gravitationnel, Champ électrostatique

- ***Energie potentielle***

Ce champ de force dérive d'une énergie potentielle s'il existe **une fonction $E_p(M)$** (ou $E_p(\vec{r})$) telle que le travail élémentaire de la force $\vec{f}$ vérifie $\boxed{\vec{f}.\vec{dr}=\delta W=-dE_p(\vec{r})}$ quel que soit le déplacement élémentaire. **$E_p(M)$** correspond à **l'énergie potentielle** du point matériel M dans R et s'exprime en Joule.

Remarques :

- dE_p correspond à la variation de la fonction $E_p(M)$ lorsque M passe en M', infiniment voisin de M, c'est-à-dire lorsque le vecteur position $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ varie de $\vec{dr}$.
- L'énergie potentielle $E_p(\vec{r})$, étant définie à partir de sa différentielle, n'est déterminée qu'à une constante additive près.
- La signification physique du signe - apparaît par la suite (voir 2)).

- ***Relation entre le champ de force et l'énergie potentielle***

Cette relation est donnée par la définition de la fonction énergie potentielle : $\vec{f}\left(\vec{r}\right).\vec{dr}=-dE_p\left(\vec{r}\right)$

Cas particulier d'un mouvement à une dimension

Le point matériel M décrit par exemple l'axe Ox de R : $\vec{f}(x)=f(x).\overrightarrow{e_x}$ et $E_p(x)$

$$\vec{f}\left(\vec{r}\right).\vec{dr}=f(x).dx=-dE_p(x)=-\frac{dE_p(x)}{dx}.dx \qquad f(x)=-\frac{dE_p(x)}{dx}$$

**Généralisation à trois dimensions*

+ Coordonnées cartésiennes *base utilisée* $\left(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z}\right)$ $\vec{f}(x,y,z)$ et $E_p(x,y,z)$

$$\vec{f}.\vec{dr}=f_x.dx+f_y.dy+f_z.dz=-dE_p(x,y,z)=-\frac{\partial E_p}{\partial x}.dx-\frac{\partial E_p}{\partial y}.dy-\frac{\partial E_p}{\partial z}.dz \quad \textit{soit} \quad f_x=-\frac{\partial E_p}{\partial x}\ ;\ f_y=-\frac{\partial E_p}{\partial y}\ ;\ f_z=-\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

+ Coordonnées cylindriques *base utilisée* $\left(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z}\right)$ $\vec{f}(r,\theta,z)$ et $E_p(r,\theta,z)$

$$\vec{f}.\vec{dr}=f_r.dr+f_\theta.r.d\theta+f_z.dz=-dE_p(r,\theta,z)=-\frac{\partial E_p}{\partial r}.dr-\frac{\partial E_p}{\partial \theta}.d\theta-\frac{\partial E_p}{\partial z}.dz \quad \textit{soit} \quad f_r=-\frac{\partial E_p}{\partial r}\ ;\ f_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\ ;\ f_z=-\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

2) Energie potentielle et forces conservatives

- ***Propriétés des forces dérivant d'une énergie potentielle***

Par intégration de la relation locale $\delta W=\vec{f}.\vec{dr}=-dE_p(\vec{r})$ le long de la trajectoire C effectivement suivie par M entre M_1 et M_2 il vient : $\boxed{W_{M_1\to M_2}=\int_{M_1(C)}^{M_1}\vec{f}.\vec{dr}=-\int_{M_1}^{M_2}dE_p(\vec{r})=E_p(M_1)-E_p(M_2)=-\Delta E_p}$

On constate que le travail de la force $\vec{\mathbf{f}}$ entre deux positions M_1 et M_2 **ne dépend que de ces positions et non de la trajectoire suivie entre ces deux points**.

Une force dérivant d'une énergie potentielle est dite conservative (son travail est indépendant du chemin suivi).

- ***Interprétation physique***

La dénomination de force conservative se justifie à partir du théorème de l'énergie cinétique.
Si un point matériel n'est soumis qu'à une force conservative, le travail fini de cette force s'écrit $W = -\Delta E_p$ par définition des forces conservatives. Alors le théorème de l'énergie cinétique s'écrit $\Delta E_c = W = -\Delta E_p$ soit $\Delta E_c + \Delta E_p = \Delta\left(E_c + E_p\right) = 0$. Cette équation traduit **la conservation de la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle** que nous verrons sous le nom d'énergie mécanique dans la suite du cours.

3) Exemples de calcul d'énergie potentielle (voir TD)

- Force constante : $\vec{f_o}$ $\quad E_p = -\vec{f_o}.\overrightarrow{OM} + cste$

Exemple du poids : $\boxed{E_p = mgz + cste}$ (z correspondant à **l'axe vertical ascendant**)

- Force de rappel élastique : $\vec{f} = -k\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_o}\right) = -k\left(x - l_o\right).\overrightarrow{e_x}$ $\quad \boxed{E_p = \frac{1}{2}.k\left(l - l_o\right)^2 + cste}$
- Force newtonienne : $\vec{f} = -\frac{k}{r^2}.\overrightarrow{e_r}$ $\qquad E_p = -\frac{k}{r} + cste$

IV. ENERGIE MECANIQUE

1) Energie mécanique d'un point matériel

Soit un point matériel M en mouvement dans un **référentiel R_G galiléen** sous l'action de diverses forces $\vec{F} = \overrightarrow{F_c} + \overrightarrow{F_{nc}}$:

- $\overrightarrow{F_c}$ forces "conservatives" dérivant d'une fonction énergie potentielle E_p
- $\overrightarrow{F_{nc}}$ non conservatives (ex : forces de frottement solide, fluide...)

Pour un déplacement de M de A à B, l'application du théorème de l'énergie cinétique conduit à :
$E_c(B) - E_c(A) = W_{\overrightarrow{F_c}} + W_{\overrightarrow{F_{nc}}} = E_p(A) - E_p(B) + W_{\overrightarrow{F_{nc}}}$ $\qquad$ soit $\qquad [E_c(B) + E_p(B)] - [E_c(A) + E_p(A)] = W_{\overrightarrow{F_{nc}}}$
Par définition, $\boxed{\mathbf{E_m = E_C(t) + E_p(M)}}$ désigne l'**énergie mécanique du point matériel** M et s'exprime en Joule.

2) Théorème de l'énergie (de la puissance) mécanique dans R_G galiléen

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel entre deux instants est égale à la somme des travaux des forces non conservatives appliquées à ce point.

$\boxed{\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = W_{\overrightarrow{F_{nc}}\ A\to B}}$ = travail des forces non conservatives

Sous forme élémentaire : $\boxed{\mathbf{dE_m = \delta W_{nc}}}$
ou encore $\boxed{\mathbf{\frac{dE_m}{dt} = P\left(\overrightarrow{f_{nc}}\right)}}$ (**théorème de la puissance mécanique**)

Remarque : Ce n'est qu'une autre formulation du théorème de l'énergie cinétique.

3) Conservation de l'énergie mécanique (voir TD)

Si le travail des forces non conservatives est nul, alors l'énergie mécanique E_m est une constante du mouvement et constitue une intégrale première du mouvement (relation entre $\vec{r}$ et $\frac{d\vec{r}}{dt}$).
L'énergie potentielle peut varier en se transformant en énergie cinétique et réciproquement, la somme des deux énergies restant constante : **le système est dit conservatif.**

V. ETUDE QUALITATIVE D'UN POINT MATERIEL EN MOUVEMENT A UN DEGRE DE LIBERTE DANS UN CHAMP CONSERVATIF

Soit un point matériel M, de masse m, dont le mouvement dans un référentiel galiléen ne dépend que d'un seul paramètre α - coordonnée de M - (mouvement à un degré de liberté). Ce point est soumis à l'action d'un champ de forces conservatif (forces dérivant d'une énergie potentielle).

1) Equilibre et stabilité

- ***Equilibre***

Un point matériel M est à l'équilibre dans un référentiel donné R lorsque **sa vitesse et son accélération sont nulles** : $\forall\, t,\ \vec{v}(M/R) = \vec{a}(M/R) = \vec{0}$
Si **R est galiléen,** d'après le principe fondamental de la dynamique alors la résultante des forces qui s'applique sur ce point est nulle : $m\vec{a}(M) = \vec{f} = \vec{0}$.

- ***Stabilité de l'équilibre***

On dit qu'un équilibre est :
- **stable** si la force qui apparaît lorsqu'on écarte M de sa position d'équilibre tend à le ramener vers cette dernière.
- **instable** si la force qui apparaît lorsqu'on écarte M de sa position d'équilibre tend à l'éloigner de cette dernière.

- ***Lien avec l'énergie potentielle***

Prenons, par exemple, le cas d'un point matériel se déplaçant selon l'axe Ox (vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x}$), soumis à une force $\vec{f} = f(x)\overrightarrow{e_x}$ dérivant d'une énergie potentielle $E_p(x)$.
D'après III. 1) $f(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}$ et l'équilibre est obtenu en $x = x_e$ à condition que :

$f(x_e) = -\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_e} = 0$ **l'énergie potentielle est extrémale à l'équilibre**